Lección Inaugural
Curso Académico 2010-2011

Universidad de Alicante

Investigación Operativa o la aplicación del método científico a la toma de decisiones

Marco A. López-Cerdá
Catedrático de Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencias

Hoy me corresponde el inmenso honor de pronunciar la Lección Inaugural del Curso Académico 2010-2011 en mi Universidad de Alicante. Aspiro a que esta lección sea un humilde reflejo del alto prestigio científico que esta institución ha alcanzado en su todavía corta vida. Se trata pues de un gran reto profesional, al que creo debo responder eligiendo el tema al que he dedicado casi cuarenta años de mi carrera, en su doble vertiente de profesor y de investigador: la Investigación Operativa.

Cuando recurrimos a un diccionario en búsqueda de la definición de una determinada disciplina científica, solemos encontrar una respuesta clara, concisa y sucinta, que suele satisfacer nuestra curiosidad. Por ejemplo, en el Diccionario Manual de la Lengua Española Vox, de la Editorial Larousse (2007), encontramos que *Física* es la "ciencia que estudia las propiedades de la materia y de la energía, y establece las leyes que explican los fenómenos naturales, excluyendo los que modifican la estructura molecular de los cuerpos". Por su parte una de las acepciones que el Diccionario de la Real Academia Española[1] atribuye al vocablo *Economía* establece que dicha "ciencia es la que estudia los métodos más eficaces para satisfacer las necesidades humanas materiales, mediante el empleo de bienes escasos". Si realizamos una nueva búsqueda con el objeto de conocer cual es el significado de una materia científica que se denomina *Investigación Operativa* (IO, de forma abreviada), y que forma parte de los contenidos curriculares de algunas de las antiguas licenciaturas impartidas en nuestras universidades, así como de los nuevos grados emergentes en el contexto de los cambios derivados de los acuerdos de Bolonia, experimentaremos la decepción de que dicha búsqueda es infructuosa. Con la ayuda de Google y de la Web de Principia Cybernetica, encontraremos la siguiente definición, que se atribuye a la Operational Research Society de Gran Bretaña en 1962[2]: "Investigación Operativa es la disciplina que aborda, a través de la ciencia moderna, problemas complejos relativos a la dirección y gestión de grandes sistemas en los que intervienen hombres, máquinas, materiales y dinero, y que surgen en la industria, los negocios, la administración y la defensa". Una definición mucho más actual, que aparece en la Web del Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), dice que "Investigación Operativa es la disciplina que ayuda a la toma de mejores decisiones mediante la aplicación de métodos analíticos avanzados[3].

1 http://www.rae.es/ . Fecha de Obtención de la Información: 9 Febrero del 2010.

2 Operational Research Quarterly 13(3), 1962, p. 282.

3 "O.R. is the discipline of applying advanced analytical methods to make better decisions" (INFORMS, http://www.informs.org/)

De éstas, y de muchas otras definiciones alternativas que se han dado de la IO en sus aproximadamente 60 años de vida, se desprende que esta disciplina no puede ser vista ni como una ciencia natural ni como una ciencia social, y que su principal característica es la aplicación del método científico a la toma de decisiones complejas en contextos muy diversos. Con el riesgo de incurrir en una simplificación excesiva podríamos definir la IO como la ciencia de la *toma de decisiones*.

Desde esta acepción, es difícil reconocer cuales son los orígenes históricos de la IO, puesto que la toma de decisiones importantes es obvio que arranca con Adán y Eva. Algunos afirman que la IO tuvo que ser aplicada por José cuando éste ayudó al faraón de los egipcios, posiblemente Apofis II (según la Enciclopedia Católica[4]), a optimizar los escasos recursos existentes en los siete años de vacas flacas. Dido, o Elisa de Tiro en la Eneida, también pudo aplicar la IO cuando el rey Yarbas le ofreció la concesión de la máxima extensión de terreno que podía ser abarcada por una piel de toro. Dido decidió cortar la piel de toro en finas tiras con las que delimitó un extenso territorio sobre el que asentó la antigua Cartago.

Sin duda la *programación matemática* (PM, abreviadamente) puede ser considerada el núcleo de la IO, y es este capítulo clave de nuestra disciplina el que recibirá mayor atención en esta lección inaugural. El término fue utilizado por primera vez en 1959, con ocasión del RAND Symposium que tuvo lugar en Santa Mónica (California), para referirse a la disciplina matemática que tiene por objeto la resolución de problemas de optimización. Aunque hoy en día *optimización* y *programación matemática* se consideran sinónimos, alrededor de los años 50 del siglo pasado se apostó decididamente por el segundo de ellos, poniendo el mayor énfasis en la naturaleza económica de los problemas abordados, y relegando a un segundo plano la fundamentación matemática de la disciplina. Es así como se acuñaron sucesivamente los términos de *programación lineal* (Dantzig, 1947), *programación no lineal* (Kuhn y Tucker, 1951), *programación dinámica* (Bellman, 1957), *programación entera* (Gomory, 1958), etc.

Dantzig

Khun

Tucker

Bellman

Gomory

4 http://ec.aciprensa.com/f/faraon.htm

La *optimización* está presente en cualquier actividad planificada del ser humano. Las compañías aéreas planifican sus vuelos y la rotación de las tripulaciones con el afán de minimizar los costes o, lo que es equivalente, de maximizar sus beneficios. Los inversores orientan sus decisiones de forma que se minimicen los riesgos a la vez que se garanticen niveles de rentabilidad satisfactorios. En general, las industrias aspiran a una eficiencia máxima a la hora de diseñar sus productos y de organizar sus propios procesos productivos.

Por su parte la naturaleza también optimiza, y los sistemas físicos evolucionan hacia un estado de mínima energía. Las moléculas en un sistema químico aislado reaccionan entre ellas hasta que la energía potencial de sus electrones alcanza su mínimo valor. Los rayos de luz siguen aquellas trayectorias que minimizan la duración de su viaje.

Lo que sí puede afirmarse con rigor histórico es que los verdaderos prolegómenos de la *programación matemática* se corresponden con las decisivas aportaciones de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII al desarrollo de las poderosas herramientas del cálculo.


Issac Newton

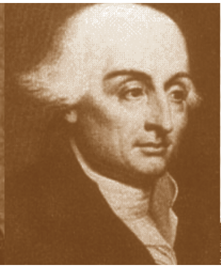
Destaquemos aquí a Sir Isaac Newton con sus descubrimientos fundamentales alrededor de 1665 [5], como lo fueron su método para calcular, de forma aproximada, las raíces de una ecuación, y las condiciones necesarias para la existencia de extremo (máximo o mínimo) de una función. Aproximadamente 35 años antes, Pierre de Fermat, magistrado de la ciudad francesa de Toulouse, hizo uso implícito de la condición necesaria de optimalidad establecida por Newton, pero sin recurrir (por ser desconocidas) a la noción de derivada ni a la de límite. Brook Taylor, discípulo de Newton, puso la primera piedra de la teoría de la aproximación, de gran importancia en IO, al utilizar polinomios para aproximar determinadas funciones diferenciables con una cota de error preestablecida. El matemático francés Joseph-Luis de Lagrange, en su celebrado libro *Mécanique Analytique*, introduce su método, conocido como regla de los multiplicadores de Lagrange, para encontrar los extremos de una función cuyas variables están sujetas a restricciones en forma de igualdad, aunque su procedimiento es descrito como una herramienta para determinar los estados de equilibrio de un sistema dinámico. El caso en que las restricciones tienen forma de desigualdad, como sucede frecuentemente en problemas de optimización típicos de la IO, fue analizado por primera vez por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, quien propuso su conocido método de eliminación de variables en un sistema de inecuaciones lineales, extensión del método de eliminación de Gauss. Una condición necesaria de optimalidad, adaptación de la de Lagrange, fue conjeturada por el economista-matemático Antoine-Augustin Cournot (1827) para ciertos casos particulares, y por el matemático ruso Mikahil Ostrogradski (1834) para el caso general.

Fue en el año 1951 cuando la llamada *programación matemática no lineal,* disciplina que se ocupa del problema de minimizar (o maximizar) una función objetivo no-lineal cuyas variables están sometidas a restricciones, también no lineales, en forma de

5 Cuando tenía menos de 25 años de edad.


Fermat


Taylor


Lagrange


Fourier


Cournot


Ostrogradski

desigualdad, cobra carta de naturaleza con el artículo seminal titulado "Nonlinear programming", publicado por Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker [6]. Las famosas condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn y Tucker tienen su origen en dicho artículo, y el que ahora se las conozca como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (condiciones KKT, de forma breve) constituye un reconocimiento de la contribución del físico William Karush, quien dio una primera prueba en 1939 en su tesis no publicada.

También a lo largo de los siglos XVII y XVIII, y principios del XIX, se formularon por primera vez las leyes básicas de la probabilidad, proporcionando la base para un análisis científico de la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. Este periodo puede considerarse como la prehistoria de la IO.

En lo que todos los analistas coinciden es en situar el origen histórico de la IO en los años críticos de la 2ª Guerra Mundial. En 1936 el British Air Ministry estableció una estación de investigación militar en Suffolk [7] con el objetivo de aplicar nueva tecnología al uso del radar en la intercepción de aviones de combate enemigos. La *British Operational Research Society* sitúa los orígenes de la IO en 1937, cuando los primeros logros de la estación de Suffolk fueron reconocidos y explotados por un equipo de oficiales del RAF, en su base de operaciones en Kent [8]. El término "Operational Research" es atribuido a Albert P. Rowe, segundo superintendente de la base de Suffolk, quien lo introdujo en 1938.

Bajo la dirección del físico Patrick M.S. Blackett, y en el seno de la Royal Air Force, se creó en 1940 un grupo de estudio interdisciplinario, conocido como *Blackett's Circus*, y que estuvo originalmente integrado por tres psicólogos, un físico, un astrofísico, cuatro matemáticos, un oficial de la armada y un topógrafo. Su eficacia en la destrucción de los famosos submarinos alemanes

6 H.W. Kuhn, A.W. Tucker, "Nonlinear programming", en los *Proceedings of the Second Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman, editor, University of California Press, Berkely, 1951, pp. 481-492.

7 La Bawdsey Manor Research Station, en Suffolk. Su primer director fue Robert Watson-Wat, del National Pshysical Laboratory.

8 En Biggin Hill Airfield.

de la serie U, en la batalla del Atlántico, gracias a la ubicación estratégica de cargas de profundidad, fue extraordinaria, siendo este grupo el precursor de grupos de IO similares creados en la Armada Británica. La característica de interdisciplinariedad de estos grupos es esencial a la IO, desde sus mismos orígenes, y su éxito futuro dependerá en buena medida del mantenimiento de este espíritu de colaboración científica. Blackett obtuvo el Nobel en Física en 1948 [9].


Patrick M. S. Blackett

Otros antecedentes matemáticos de la IO son los siguientes. Con anterioridad a 1936 ya se habían publicado algunos artículos de investigación que versaban sobre sistemas de desigualdades lineales, vinculados por tanto a la base teórica de la programación lineal. De hecho en 1936, en la tesis doctoral del matemático alemán Theodore S. Motzkin [10] se citaban 42 artículos previos sobre el tema. De hecho, el llamado *teorema de transposición de Motzkin* incluye como casos particulares otros importantes resultados para sistemas de desigualdades lineales, como los teoremas de Gordan y Stiemke, y permite deducir, a partir de él, el decisivo teorema de dualidad de la programación lineal.

Con la publicación también en 1941 de la primera *tabla input-output* (TIO, abreviadamente) de la economía norteamericana, Wassily W. Leontief, economista ruso, recién incorporado por aquel entonces a la Universidad de Harvard, estableció las bases de la *economía interindustrial.* Este instrumento estadístico desglosa la Producción Nacional entre los diferentes sectores que la han originado y los sectores que la han absorbido; y por ello reciben el nombre de *tablas intersectoriales. Output* designa el producto que sale de una empresa o industria, mientras que *inputs* son los factores o recursos que se requieren para realizar esa producción. Las TIO's muestran la producción total de cada sector productivo y cuál es el destino de esta producción; cuánto de lo producido es adquirido por el consumidor y cuánto es absorbido por cada uno de los demás sectores. A pesar de sus limitaciones conceptuales, las TIO's se revelaron de gran valor a la hora de analizar el impacto de las políticas económicas de los gobiernos y de los cambios en los hábitos de los consumidores. Fueron utilizadas por el U.S. Department of Labor Statistics, el Banco Mundial, las Naciones Unidas, etc., valiéndole a Leontief la concesión del Premio Nobel de Economía en 1973 [11] . Fue el propio George B. Dantzig, el padre de la programación lineal, quien manifestó en 1963 que el modelo interindustrial de Leontief constituyó un factor de motivación en su concepción del modelo general de la programación lineal. Personalmente tuve el privilegio, y el goce intelectual, de estudiar, en los comienzos de mi carrera profesional, la teoría del equilibrio en economías lineales y el análisis interindustrial en el libro "Introduction to


Wassilv W. Leontief

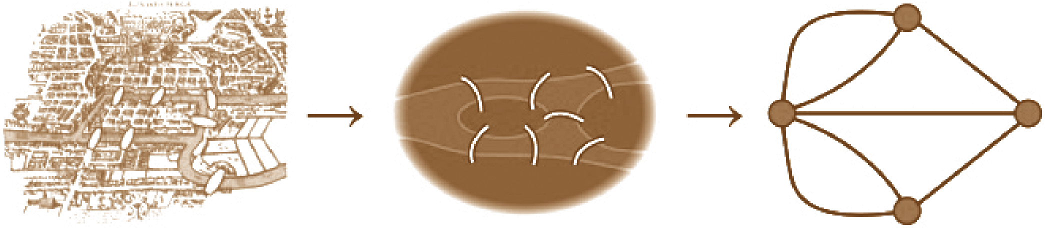
9 Blackett obtuvo el Premio Nobel en Física en 1948 por su desarrollo del método de la cámara de Wilson, y sus descubrimientos en los campos de la física nuclear y la radiación cósmica.

10 *Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen*, T.S. Motzkin, Doctoral Thesis, University of Zurich, 1936.

11 http://www.econlib.org/Enc/bios/Leontief.html

sets and mappings in modern economics", de Hukukane Nikaido[12]. Desde entonces no puedo evitar el experimentar una cierta sensación de perplejidad ante la opinión de que se puede ser un buen economista sin saber matemáticas.

En 1936 Dénes König publicó el libro *Theorie derendlichen und unendlichen Graphen* [13], donde introdujo el término *teoría de grafos*, y estableció las bases de este importante capítulo de la matemática discreta, de extraordinaria influencia en el desarrollo



posterior de la IO. Este tratado aparece doscientos años después de que Leonhard Euler resolviese *el problema de los siete puentes de Königsberg*, la antigua ciudad rusa de Kaliningrado (que durante el siglo XVIII formó parte de Prusia Oriental). Esta ciudad está atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas unidas mediante siete puentes. El problema consistía en encontrar un recorrido que pasase sólo una vez por cada uno de los puentes y regresase al punto de partida.

La respuesta de Euler al problema de los siete puentes de Königsberg es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características. En su honor se estableció posteriormente la noción de *circuito euleriano*, que es aquel camino en un grafo capaz de recorrer todas las aristas una única vez, regresando finalmente al vértice de partida.
En aquel momento Euler era consciente de que estaba tratando con un tipo distinto de geometría en el que la distancia no era relevante.

Euler

Un paso más en la dirección de liberar las matemáticas de la *necesidad de medir*, se produjo en 1750 cuando Euler escribió una carta a Christian Goldbach en la que establecía la llamada, desde entonces, *fórmula de Euler* para un poliedro, y que establece la relación entre el número de sus caras, aristas y vértices. Esta fórmula constituye el primer ejemplo

12 North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1970.

13 Dénes König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* M.B.H., Leipzig, 1936 (Chelsea Publishing Co. lo reeditó en 1950).

conocido de *invariante topológico*, noción clave en *topología*, disciplina matemática de extraordinaria importancia y que se beneficia, al igual que la IO, de la riqueza conceptual, y de su valor como herramienta de modelización, de la teoría de grafos. Es interesante constatar el hecho de que la fórmula de Euler no fuese descubierta antes, y que la sencilla relación que establece pasase desapercibida a Arquímedes y al propio Descartes, quienes estudiaron a fondo las propiedades de los poliedros. La razón puede ser que todos los matemáticos que precedieron a Euler en el estudio de los poliedros, fueron incapaces de pensar en propiedades geométricas que no estuvieran ligadas a la noción de distancia.

Recientemente, el joven matemático español, Francisco Santos Leal [14], catedrático de la Universidad de Cantabria, ha refutado la conjetura de Hirsch (formulada en 1957) al describir la construcción de un poliedro de dimensión $d = 43$, con número de facetas $n = 86$, y diámetro mayor que $\delta = 43$ (la conjetura de Hirsch establece que δ debe ser menor o igual que $n - d$). Este descubrimiento, de extraordinaria repercusión en combinatoria poliédrica, optimización, y muchos otros capítulos de las matemáticas, ha causado una inmensa satisfacción entre los miembros de la comunidad matemática española.

En 1937 Merrill M. Flood mantuvo una conversación con Albert W. Tucker sobre un problema de gran interés, tanto desde el punto de vista matemático como por sus evidentes aplicaciones, el *problema del agente viajero*. A partir de dicha conversación, Flood estudió en profundidad dicho problema, lo popularizó con dicho nombre en inglés, es decir el *travelling salesman problem* (TSP, abreviadamente), y contribuyó a que fuese considerado durante muchos años el paradigma de la *optimización combinatoria*. A finales de los años 40, la importante RAND Corporation, tras la intervención del propio Flood, vio en este problema un reto intelectual, merecedor del interés científico de la corporación.

Un inciso. El Proyecto RAND (Research and Development) fue lanzado por el gobierno de los EEUU en 1945 con el fin de explotar la experiencia adquirida por aquellos científicos que habían participado en la planificación de operaciones militares durante la 2ª Guerra Mundial, y aplicarla a la resolución de problemas, de gran complejidad, surgidos en la posguerra en el ámbito civil. Todo un ejemplo de cómo recurrir al asesoramiento científico en la toma de decisiones gubernamentales, si bien el Proyecto RAND recibió algunas críticas por su excesivo sesgo hacia las cuestiones de naturaleza militar (motivadas, quizás, por el preocupante escenario en ciernes de la Guerra Fría) [15].

14 F. Santos. A counter-example to the Hirsch Conjecture. Preprint arXiv:1006. 2814, Junio de 2010.

15 La historia de la fundación, la descripción de sus objetivos, y su evolución a lo largo de los años, pueden encontrarse en http://www.rand.org/about/history/

El problema del TSP es extraordinariamente sencillo en su formulación: Dadas n ciudades de un territorio, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades (lo que se llama un *circuito hamiltoniano*), y minimice la distancia total recorrida por el viajante. La respuesta al problema es conocida, es decir se conoce la forma de resolverlo, pero sólo en teoría, ya que en la práctica la solución no es aplicable debido al tiempo que computacionalmente se precisa para obtener el resultado. Desde el punto de vista de su complejidad computacional se trata de un problema *NP-completo.*

La solución al TSP más simple consistiría en evaluar todas las posibles rutas y quedarse con aquella en que la distancia recorrida es menor. El problema reside en que el número de estas combinaciones es n!, y este número es impracticable, incluso con los medios computacionales actualmente a nuestro alcance. Por ejemplo, si un ordenador fuese capaz de calcular la longitud de cada ruta en un microsegundo, tardaría algo más de 3 segundos en resolver el problema para 10 ciudades, algo más de medio minuto en resolver el problema para 11 ciudades, y más de 77 años en resolver el problema para sólo 20 ciudades.

Es obvio pues que los algoritmos exactos no son capaces de resolver el problema general, debido a la explosión combinatoria de las posibles soluciones. Para su solución aproximada se han aplicado distintas técnicas computacionales de diferente naturaleza, como las heurísticas evolutivas, las redes de Hopfield, etc. Así, por ejemplo, los algoritmos genéticos permiten encontrar aproximaciones suficientemente buenas (con un 3 % de error), pudiéndose aplicar a conjuntos muy grandes de ciudades (redes con millones de nodos), con tiempos de ejecución razonables en un superordenador (semanas o meses).

La primera formulación del *problema clásico de transporte* (el envío a un mínimo coste de ciertos bienes o productos desde los puntos de oferta a los de demanda, desde los almacenes o factorías a los mercados) se debe a Frank L. Hitchcock en 1941 [16] (quien también propuso un bosquejo de algoritmo para su solución), aunque la formulación precisa, su teoría y resolución (basada en el método simplex de la programación lineal) se debe a George B. Dantzig. El economista Tjalling C. Koopmans, trabajando independientemente para la British-American Combined Shipping Board, investigó y resolvió este mismo problema, al que por dicho motivo se le conoce como problema de transporte de Hitchcock-Koopmans.


Tjalling C. Koopmans

El problema de transporte tiene un antecedente histórico de gran relevancia, a saber, el *problema de transporte de masa.* Se trata de una versión continua del problema de transporte, primeramente estudiado por el matemático francés Gaspard Monge a finales del siglo XXVIII [17], quien formuló el problema en términos de geometría

16 F. L. Hitchcock, "Distribution of a product from several sources to numerous localities", *Journal of Mathematical Physics*, 3, 1941, 224-230.

17 G. Monge, *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1781.

descriptiva. En1885 Paul Appell obtuvo el Bordin Prize, concedido por la Academia de Ciencias de París, por aportar una solución a este problema. Posteriormente Kantorovich, en 1942 [18], reformuló este problema como un problema de optimización matemática en un espacio de funciones definidas sobre la familia de conjuntos de Borel de un espacio métrico compacto. Esta aproximación abstracta es la que ha permitido mayores progresos en el análisis teórico del problema.

Al igual que en el estudio de Euler sobre el problema de los siete puentes de Königsberg, también ahora las matemáticas preceden a la tecnología y se anticipan a ella. Ello nos lleva a reflexionar sobre la siguiente cuestión: ¿Debe toda investigación en matemáticas estar inspirada por un problema real, al que se trata de dar solución a través de las matemáticas, o debe el investigador sentirse libre a la hora de crear matemáticas, y pensar que las aplicaciones ya llegarán después, con el tiempo?

J. Franklin

Personalmente, nos inclinamos por la segunda opción, y nos satisface ver refrendada nuestra opinión en la siguiente revelación del prestigioso matemático-economista, Joel Franklin [19], profesor de Matemática Aplicada en el California Institute of Technology (Caltech): "En cierta ocasión el Prof. H.F. Bohnenblust me dijo algo acerca de la investigación. Había supervisado con éxito muchos proyectos de tesis doctorales, y también algunos pocos que fracasaron. Esto fue lo que dijo: –Los proyectos fracasados comenzaron con algún viejo problema famoso (como por ejemplo, probar la hipótesis de Riemann), y su pretensión fue buscar un método para resolverlo. Los proyectos que tuvieron éxito empezaron con algún método nuevo y, acto seguido, buscaron un problema al que aplicarlo–. "El propio J. Franklin, en su artículo del año 1983, da una muestra brillante de esta forma de proceder en investigación matemática, al partir del preexistente método del simplex y aplicarlo al *problema de los momentos*, problema de singular importancia en teoría de la probabilidad.

Uno de los problemas clásicos de IO, de gran impacto en los orígenes de esta disciplina, fue *el problema de la búsqueda*, problema en el que se trata de detectar un objeto de forma eficiente. Este problema se abordó por primera vez de forma científica en los comienzos de la 2ª Guerra Mundial, cuando el U.S. Navy's Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG) investigó el problema de la detección de submarinos alemanes en el Atlántico. De hecho, un primer documento titulado "Search and Screening", elaborado por Bernard O. Koopman, fue originalmente materia clasificada por las autoridades militares. En el documento se proponía un enfoque probabilístico a la ubicación óptima de instrumentos de detección. Koopman fue uno de los fundadores en 1952 de la *Operations Research of America (ORSA)*, y su sexto presidente (desde 1957).

La moderna *teoría de la utilidad* se basa en el estudio sistemático de las preferencias del individuo y aspira a obtener una representación cuantitativa de las mismas. La idea de utilidad nos remite a Daniel Bernouilli, en la primera mitad del siglo XXVIII,

18 L.V. Kantorovich, "On the translocation of masses", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 37, 1942, 199-201.
19 J. N. Franklin, "Mathematical methods of Economics", *Amer. Math.Monthly*, 90, 1983, 229-244.

Daniel Bernoulli

y la evolución del concepto es descrita por Savage en su libro de 1954[20]. Fueron John von Neumann y Oskar Morgestern quienes, en la segunda edición de su celebrado libro "Theory of Games and Economic Behavior"[21], proporcionaron un primer tratamiento axiomático a la teoría de la utilidad. La primera edición de este libro en 1944 es considerado como el primer tratado sobre los *juegos de estrategia* y sus aplicaciones a la economía y las ciencias sociales.

John von Newmann

Otro problema de IO surgido con anterioridad al nacimiento de la programación lineal es el *problema de la dieta*. En 1945 el economista George Stigler planteó el siguiente problema: Considérese un hombre moderadamente activo (por ejemplo, un profesor universitario de 40 años de edad), y una lista de 77 alimentos que pueden entrar a formar parte de su dieta diaria. La pregunta es: ¿qué cantidad de cada uno de estos alimentos debe incorporar a su dieta para que la ingesta de 9 nutrientes básicos no sea inferior a las cantidades mínimas recomendadas por las autoridades sanitarias, y que a la vez el coste total de los alimentos consumidos (o coste de la dieta) sea mínimo? Stigler formuló este problema de optimización en términos de un conjunto de 9x77 desigualdades lineales simultáneas y de forma heurística, pero sagaz, determinó una solución no-óptima cuyo coste era de 39.93$ al año (precios del año 1939)[22]. Con posterioridad (en 1947), Dantzig formuló el problema de la dieta como un problema de programación lineal de gran dimensión, utilizando el método simplex, y con un coste computacional considerable (120 personas-días, usando calculadoras de mesa), obtuvo la solución óptima y consiguió ahorrar (?!) 24 céntimos por año respecto de la solución aproximada hallada por Stigler. La inteligencia y habilidad demostradas por Stigler, en esta y otras ocasiones, le hicieron digno merecedor del premio Nobel de Economía, que obtuvo finalmente en 1982 por sus estudios sobre la estructura industrial, el funcionamiento de los mercados, y las causas y efectos de la regulación pública.

George Stigler

Puesto que la *programación matemática* aborda el vital problema de asignar óptimamente recursos limitados con el fin de alcanzar determinados objetivos, se comprende fácilmente que la programación matemática sea considerada la piedra angular de la IO, y se interprete que su nacimiento oficial en 1947 confiera a la IO la categoría de disciplina científica independiente. Un problema de programación lineal es aquél en el que se trata de maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal de

20 L.J. Savage, *The Foundations of Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1954.

21 J. von Meumann, O. Morgestern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ª Edición, Princeton University Press, Princeton, Princeton, 1947.

22 G, Stigler, "The cost of subsistence", *Journal of Farm Economics*, 27, 1945, 303-314.

varias variables que están sometidas a restricciones expresables en forma de desigualdades y/o igualdades lineales. El primero en dar esta formulación fue George B. Dantzig, y muy pronto se evidenció el hecho extraordinario de que miles de problemas de decisión que surgen en los negocios, la industria, la administración, en la actividad militar, etc. son de esta naturaleza, o pueden ser aproximados por problemas de este tipo. Aunque hubo algunos intentos previos de expresar el modelo en términos matemáticos, en su mayoría debidos al prestigioso matemático ruso Leonid V. Kantorovich en el entorno de 1939, lo cierto es que sólo Dantzig puede ser considerado el verdadero padre de la programación lineal, en tanto que, aparte de la formulación precisa del problema, inventó el *método simplex* para su resolución exacta, y con él revolucionó el mundo de la toma de decisiones en la segunda mitad del siglo XX.

En 1975 Kantorovich y Koopmans fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía por su contribución a la teoría de la asignación óptima de recursos, lo que decepcionó a muchos investigadores operativos que consideraban superiores los méritos de Dantzig. El propio Koopmans consideró la concesión injusta en dicho sentido, y propuso a Kantorovich renunciar al premio. La renuncia de Kantorovich era una decisión harto difícil para él en la medida en que su trabajo científico no era debidamente reconocido en la antigua Unión Soviética, en donde la utilización de métodos matemáticos en Economía, y la optimización de beneficios, se consideraban actitudes claramente anti-marxistas. Por su parte, Koopmans donó, a modo de compensación, 40,000$ al International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), en Laxenburg (Austria), centro de investigación en el que los tres científicos compartieron estancias de investigación a lo largo de los años. El método simplex se sigue enseñando en las facultades de matemáticas, de economía, escuelas de ingeniería, de negocios, etc. de todas las universidades del mundo, a pesar de que otros métodos de resolución han surgido posteriormente con el propósito de mejorar su eficiencia computacional (éste es el caso de los *métodos de puntos interiores*). El método simplex fue seleccionado como uno de los diez algoritmos más decisivos del siglo XX [23].

László Lovász, en 1980 [24], afirmó lo siguiente: "Si uno tuviera que hacer una estadística acerca de qué problema matemático está consumiendo más tiempo de ordenador, entonces (excluyendo problemas de manejo de bases de datos, como búsqueda u ordenación) la respuesta sería probablemente que dicho problema es el de programación lineal".

Otra anécdota ilustrativa de la importancia de la programación lineal es la siguiente. En 1958, Joel Franklin colaboró en la realización de una encuesta, dirigida por el Caltech Computing Center, sobre los usos industriales de grandes ordenadores. La compañía visitada en cierta ocasión era la Mobil Oil Corporation, en donde el vicepresidente de la compañía en persona recibió a Franklin en su lujosísimo despacho. Con sorpresa, Franklin reconoció en él a un compañero suyo del Courant Institute de Nueva York, con el que había compartido incómodos despachos, no excesivamente limpios, y sin aire acondicionado. La compañía había

23 "The top ten algorithms of the century", suplemento a *Computing in Science and Enginnering*, 1, 6, IEEE, 2000.
24 L. Lovász. "A new linear programming algorithm - better or worse than the simplex method? Math. Intelligencer 2, 1979/80, 141-146.

adquirido recientemente un gran ordenador que había costado millones de dólares, y a la pregunta de cuál era la rentabilidad que esperaban obtener de dicha inversión, el antiguo colega de Franklin (supuestamente predestinado, como él, a una vida no demasiado holgada) contestó "No hay problema. Este equipo ya ha sido pagado con los beneficios que la compañía ha obtenido, a través de su uso, en dos semanas". Franklin preguntó: ¿De qué manera?", y la respuesta fue concisa: "Resolviendo principalmente problemas de programación lineal".

La relación entre la *programación lineal* y la *teoría de juegos* estuvo presente en los primeros análisis de la teoría de la dualidad y su relación con el teorema del minimax de von Neumann. Una pequeña joya histórica es la conversación que Dantzig y von Neumann mantuvieron en el despacho de este último en la Universidad de Princeton, al que el primero acudió a presentar su teoría ante el líder científico consagrado que von Neumann era [25].

En los años 50 del siglo XX la investigación estuvo centrada en algunas subclases de problemas, importantes en la práctica, y que poseen una estructura particular, proponiéndose para su resolución algoritmos específicos que explotan la estructura del problema en beneficio de la eficiencia computacional del método. Mencionemos, por ejemplo, los problemas de *transporte*, *transbordo*, *asignación*, *flujo en redes*, *secuenciación*, etc., problemas que surgen en una gran variedad de aplicaciones, en campos tales como la planificación de proyectos, las técnicas de localización, el diseño de itinerarios de distribución y, en un contexto más general, la planificación de grandes sistemas logísticos.

A mitad de los años 50 se asiste al desarrollo de diferentes algoritmos eficientes para resolver el problema de *programación cuadrática*, que es el problema no lineal más sencillo, y para el que las condiciones de KKT proporcionan información muy valiosa cara a la resolución exacta del problema. Precisamente en las condiciones de KKT se basaron los métodos más importantes para resolver un problema no lineal, propuestos en el periodo 1955-1970 (métodos de *direcciones factibles*, métodos de *penalización*}, métodos de *programación cuadrática secuencial*, etc.). No obstante, hasta los años 90s, con el desarrollo pleno de la informática, no fue posible su aplicación eficiente a problemas reales.

Hoy en día existen grupos de investigación dedicados a la IO, principalmente a la *programación matemática*, en muchas universidades españolas. Algunos de estos grupos desarrollan una investigación de carácter teórico, mientras que otros muestran un mayor interés en las aplicaciones, o en cuestiones algorítmicas y metodológicas. Un indicio común del alto nivel de tales grupos, y de su proyección internacional, es su activa presencia en foros internacionales como los grupos de trabajo de EURO (Association

25 G. Dantzig, "The Story About It Began: Some legends, a little about its historical significance, and comments about where its many mathematical programming extensions may be headed", en *History of Mathematical programming. A Collection of Personal Reminiscences*, editado por J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, y A. Schrijver, CWI North-Holland, Amsterdam, 1991.

of European Operational Research Societies), su participación activa en la organización de eventos científicos internacionales, las numerosas publicaciones en las revistas científicas internacionales de mayor prestigio, y su participación destacada en proyectos de I+D+i (en colaboración con empresas e instituciones).

A continuación se describen las *líneas de investigación* de estos grupos, comenzando con aquellos temas de carácter más teórico, y siguiendo con los temas más algorítmicos y con mayor orientación hacia la modelación y las aplicaciones. Todas las líneas de investigación que se describen acto seguido se caracterizan por su importante potencial de transferencia tecnológica.

1.- *Optimización global.* Una línea emergente de investigación se basa en explorar nuevas técnicas de descomposición en *diferencia de funciones convexas* (d.c.), y su aplicación a los algoritmos numéricos de ramificación y acotación. Existen importantes aplicaciones a la estadística y la ingeniería.

2.- *Optimización vectorial.* En áreas como la política, la economía, los negocios, las ciencias sociales, la ingeniería o la industria, es habitual reconocer la existencia de múltiples aspiraciones u objetivos, a veces enfrentados, con lo que se hace necesario el estudio de técnicas de decisión basadas en la consideración simultánea de varios objetivos o criterios (*programación multiobjetivo, decisión multicriterio*).

3.- *Estabilidad* y *mal-condicionamiento* en optimización. El análisis de las propiedades de los principales elementos del problema (el conjunto factible, el valor óptimo y el conjunto de soluciones óptimas), el estudio de su estabilidad y de los diferentes tipos de mal-condicionamiento, y las implicaciones numéricas de estas cuestiones, son temas de considerable proyección de futuro.

4.- *Programación estocástica* con *variables enteras.* Combina las ventajas de incorporar la incertidumbre de los modelos (mediante la representación en forma de árbol de posibles escenarios) y la capacidad para la modelización de la programación matemática con variables enteras. Los modelos que resultan son de una dificultad extrema y no existen, hoy en día, métodos generales eficientes de resolución.

5.- Modelos de *optimización dinámica*, *estocástica* y *combinatoria.* La investigación en este tema se centra en el desarrollo de nuevos métodos, formulaciones y algoritmos para la resolución de problemas de planificación y control en aplicaciones que conciernen a los sistemas productivos, logísticos y financieros.

6.- *Problemas combinatorios* difíciles, para los que no se conocen algoritmos eficientes (polinomiales en el tamaño de los datos). La ampliación de la clase de problemas difíciles que pueden ser resueltos eficazmente es uno de los retos de las matemáticas en la actualidad. Entre los más importantes se encuentran los de agregación de preferencias, gestión de bases de datos, minería de datos, compresión de imágenes y datos, diseño o expansión de redes óptimos, planificación de producción y decisión multicriterio. Esta línea de trabajo distingue claramente dos áreas complementarias: investigación en métodos generales para resolver problemas combinatorios complejos (algorítmica, combinatoria, geometría discreta, geometría computacional, etc.) e investigación en problemas concretos (tarificación en redes, expansión de líneas de transporte urbano, competición y cooperación en mercados, teoría de localización, etc.).

7.- *Minería de datos*. Es un área emergente, a medio camino entre la informática, la inteligencia artificial, y la estadística e investigación operativa, que diseña algoritmos con los que extraer, a partir de los datos, patrones comprensibles que generen conocimiento útil. Tiene importantes aplicaciones en genómica, medicina, telecomunicaciones, informática, finanzas, etc. Una línea de trabajo en minería de datos es la utilización de métodos de optimización, fundamentalmente en el campo de la clasificación. Ejemplos paradigmáticos en este campo son las *máquinas de vector soporte* y los *métodos de vecino más próximo*.

8.- Modelización y optimización de *problemas de gran dimensión*, y su aplicación a problemas reales de nuestro entorno social. Los métodos más idóneos en la optimización de problemas de gran dimensión son los *algoritmos de punto interior*, cuya complejidad es polinomial. En la actualidad se aplican, por parte de algún grupo de investigación español, a la protección de datos estadísticos.

9.- Diseño de *rutas óptimas* de vehículos. Comporta nuevos retos matemáticos a la vez que resuelve importantes problemas reales. En la actualidad es posible resolver óptimamente problemas de grandes dimensiones (con grafos asociados de más de veinte mil nodos) gracias, no tanto a los avances informáticos (que sin duda han contribuido de forma importante), como a las investigaciones matemáticas del poliedro asociado a las soluciones factibles. La *combinatoria poliédrica* se ha revelado como una herramienta fundamental para la resolución de complejos problemas de optimización.

10.- *Teoría de juegos*. Algunas líneas de investigación en las que algunos grupos españoles han realizado contribuciones significativas son, entre otras, el estudio de los equilibrios, de la competencia y la cooperación en situaciones en las que interaccionan varios agentes (en particular en modelos de teoría de colas, de gestión de inventarios, de secuenciación, de redes de flujo y de planificación de proyectos), la determinación de tarifas, el diseño y análisis de estructuras de votación, la conciliación y el arbitraje, así como el estudio de redes sociales y económicas, aportando el enfoque de la teoría de juegos a conceptos clásicos en sociología.

Tvrell Rockafellar

Boris Mordukhovich

Me cabe el honor de pertenecer al grupo de Optimización del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante. Éste es un grupo de investigación muy activo, y de gran proyección internacional. En los últimos cincos años sus miembros han publicado más de cincuenta trabajos de investigación en las revistas internacionales de mayor impacto (Mathematical Programming, SIAM Journal on Optimization, Mathematics of Operations Research, Journal of Convex Analysis, etc.), trabajos que han sido profusamente citados por diversos autores, han generado un buen número de tesis doctorales en su seno, han (co)organizado cerca de diez conferencias internacionales, y han propuesto, con éxito, la nominación como Doctores Honoris Causa por la Universidad de Alicante de los Profs. Tyrrell Rockafellar (2000) y Boris Mordukhovich (2009). Estos son buenos indicadores de la calidad de los estudios de IO en la Universidad de Alicante, y su positiva influencia en la sociedad a la que la universidad sirve.

Muchas gracias por su atención.