

Desarrollo de aplicaciones interactivas para la docencia de estructuras en Ingeniería Civil

V. Brotons Torres; F.J. Baeza de los Santos; M.A. Crespo Zaragoza; S. Ivorra Chorro

Departamento de Ingeniería Civil

Universidad de Alicante

RESUMEN (ABSTRACT)

Las nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza permiten la visualización de fenómenos físicos y su relación con la base matemática utilizada en la modelización de los mismos. En este trabajo se ha utilizado el programa Mathematica para realizar una aplicación ilustrativa del oscilador con un grado de libertad en funcionamiento libre, amortiguado y forzado armónicamente. El oscilador de 1 GL forma parte del conocimiento de base en el análisis de estructuras bajo cargas dinámicas (sismos), y la comprensión de sus fundamentos teóricos, así como la influencia de los parámetros implicados, deben ser objetivo didáctico prioritario en las asignaturas relacionadas con el cálculo avanzado de estructuras. En la aplicación desarrollada se pueden variar las características intrínsecas del oscilador (rigidez, constante de amortiguación y masa) y la fuerza aplicada (amplitud y frecuencia). El resultado se visualiza en forma de gráfico animado del movimiento permanente resultante. Las ecuaciones resultantes y los parámetros característicos (frecuencia natural, coeficiente de amortiguamiento, razón de frecuencias, factor de amplificación dinámica, ángulo de desfase...) también están disponibles de una forma interactiva. Las constantes de integración que definen las condiciones iniciales, y la ventana de tiempos mostrada pueden variarse asimismo. La aplicación puede ejecutarse desde cualquier navegador.

Palabras clave: estructuras, dinámica, oscilador, amortiguamiento, docencia.

1. INTRODUCCIÓN

En la docencia del Cálculo Avanzado de Estructuras, y en concreto para el análisis de estructuras sometidas a cargas dinámicas como pueden ser las que aparecen durante un sismo, acción del viento, explosiones u otros eventos accidentales, el conocimiento de la base teórica de funcionamiento del Oscilador con 1 Grado de Libertad, se revela imprescindible. En este sentido el planteamiento matemático del fenómeno a través de la modelización mediante ecuaciones diferenciales, no es más que un paso previo para la comprensión en profundidad de la respuesta de este mecanismo, y la influencia de los distintos parámetros característicos implicados. Es preciso complementar la exposición matemática con experiencias de visualización de resultados.

La literatura sobre análisis dinámico de estructuras es muy abundante. Podemos citar como libros de referencia los de M. Paz (1992) y Anil K. Chopra (1995), y muchos otros (Car et al., 2000, Filiatrault, 2002, Buchholdt, 1997), que tratan en primer lugar la aproximación al problema de la dinámica de estructuras mediante el estudio del oscilador armónico con un grado de libertad, para pasar después al estudio de casos más complejos pero que siempre están basados o hacen referencia a este primer mecanismo básico subyacente. Las aproximaciones experimentales usualmente consisten en prácticas de laboratorio con elementos físicos mecánicos o electrónicos, con la dificultad que en ocasiones puede suponer la disponibilidad de equipos adecuados.

El propósito del trabajo que aquí se presenta es el de facilitar la comprensión de los fenómenos físicos, en conexión con los modelos matemáticos, utilizados para representar el oscilador de un grado de libertad, por medio de una aplicación informática que modelice la respuesta del sistema oscilador en las diferentes condiciones de fuerza excitadora y parámetros intrínsecos. La principal aportación es la visualización de la respuesta del oscilador en un entorno interactivo, en el que se pueden variar en tiempo real los diferentes parámetros, sin el recurso a experimentos de laboratorio más o menos complejos. Otro propósito es no depender de software propietario ni de equipos informáticos sofisticados para utilizar la aplicación. De esta forma, las prácticas se pueden desarrollar en cualquier momento y lugar, con dispositivos usados habitualmente.

2. DESARROLLO DE LA CUESTIÓN PLANTEADA

El objetivo como se ha indicado es el desarrollo de una aplicación informática que permita modelizar un oscilador armónico con un grado de libertad. Además, se ha pretendido no depender de software propietario, y que la aplicación se pueda utilizar con una amplia diversidad de dispositivos y sin más equipo que un dispositivo electrónico con capacidad para hacer funcionar un navegador.

La aplicación ha sido desarrollada con el software Wolfram Mathematica, que permite trabajar con ecuaciones simbólicas y que, aunque requiere de Licencia para el desarrollo del código de programación, tiene un reproductor libre y gratuito para la utilización de programas. En nuestro caso ni siquiera se precisa el Mathematica Player, pues con la instalación de un plug-in gratuito la aplicación puede funcionar con cualquier navegador.

La pantalla de usuario (Fig. 1) muestra en la mitad de la izquierda:

- Las variables físicas del sistema oscilador:
 - k : rigidez.
 - η : constante de amortiguación.
 - m : masa.
- Las características de la fuerza externa variable armónicamente aplicada:
 - q : amplitud.
 - Ω : frecuencia.
- El instante de tiempo t que determina la posición de la masa.
 - t : tiempo.
- Las ecuaciones diferenciales que modelizan el sistema.
- Las soluciones transitoria y permanente, con la caracterización del sistema.
- Los controles de visualización.

La Figura 1 muestra esta pantalla de inicio, en una situación en la que la frecuencia de la fuerza excitadora es igual a la frecuencia natural del sistema. Esto es:

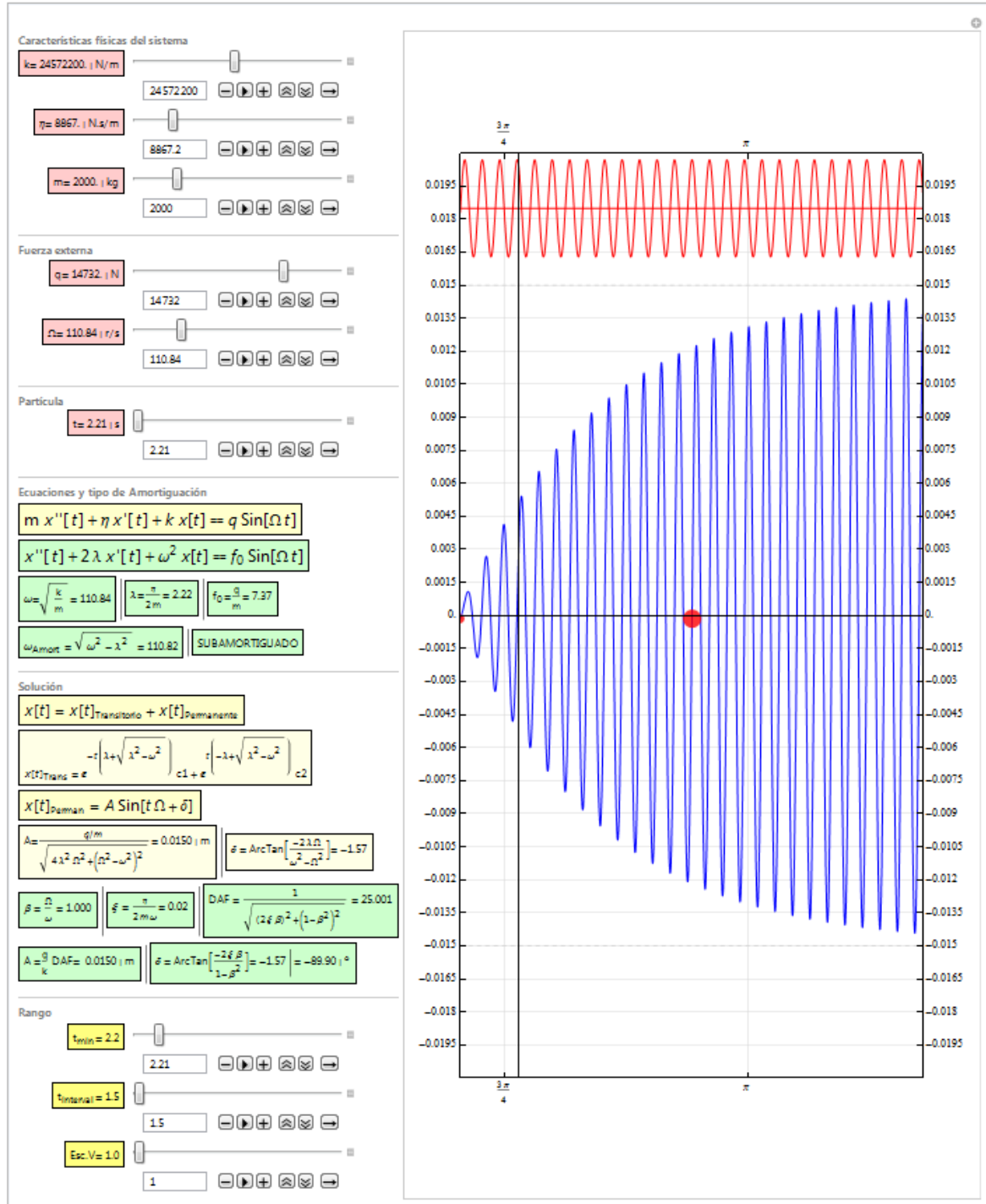
$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 1$$

- Ω : frecuencia de la fuerza excitadora.
- ω : frecuencia natural del sistema.

Todas las variables que cuentan con control deslizante pueden ser modificadas desplazando el control o introduciendo el valor numérico directamente en el cajetín. Todos los

valores mostrados se actualizan dinámicamente al variar cualquier parámetro. Lo mismo ocurre con el gráfico.

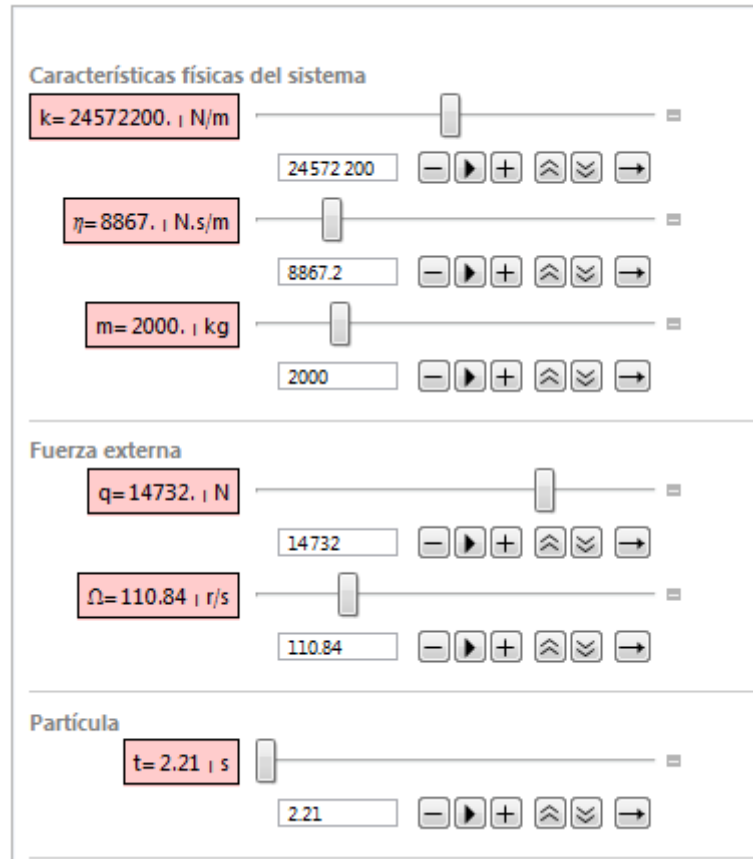
Fig.1. Vista general de la pantalla de la aplicación



2.1 Características físicas del sistema.

En la Figura 2 se puede ver un detalle de las *Características físicas del sistema* con los parámetros, las características de la fuerza excitadora y el instante t de representación de la masa en movimiento.

Fig.2. Detalle de los parámetros



2.2 Ecuaciones y tipo de amortiguamiento.

La ecuación diferencial que representa el sistema es la conocida (Ec. 1):

$$mx''[t] + \eta x'[t] + kx[t] = q \sin[\Omega t] \quad [1]$$

- k : rigidez.
- η : constante de amortiguación.
- m : masa.
- q : amplitud de la fuerza excitadora.
- Ω : frecuencia de la fuerza excitadora.

Que también puede expresarse en términos de aceleraciones (Ec. 2):

$$x''[t] + 2\lambda x'[t] + \omega^2 x[t] = f_0 \sin[\Omega t] \quad [2]$$

Con los siguientes parámetros característicos del sistema:

$$\lambda = \frac{\eta}{2m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f_0 = \frac{q}{m}$$

- λ : amortiguamiento del sistema.
- ω : frecuencia natural del sistema.
- f_0 : amplitud unitaria de la fuerza excitadora.

En la Figura 3 se puede ver un detalle de las *Ecuaciones y tipo de amortiguamiento*, donde se incluye lo anterior más al cálculo de la frecuencia del sistema amortiguado y la indicación del tipo de amortiguamiento.

Fig.3. Detalle de Ecuaciones y Tipo de Amortiguamiento

Ecuaciones y tipo de Amortiguamiento

$$m x''[t] + \eta x'[t] + k x[t] = q \text{Sin}[\Omega t]$$

$$x''[t] + 2 \lambda x'[t] + \omega^2 x[t] = f_0 \text{Sin}[\Omega t]$$

| | | |
|--|------------------------------------|----------------------------|
| $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 110.84$ | $\lambda = \frac{\eta}{2m} = 2.22$ | $f_0 = \frac{q}{m} = 7.37$ |
|--|------------------------------------|----------------------------|

$\omega_{\text{Amort}} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 110.82$

SUBAMORTIGUADO

Todos los valores se actualizan dinámicamente con los valores introducidos, detallados en la Figura 2. Los sistemas oscilatorios estudiados en Ingeniería Civil son casi exclusivamente sub-amortiguados.

2.3 Solución

En la Figura 4 se ve un detalle de *Solución*. La solución de la ecuación diferencial del movimiento consta de una parte transitoria (Ec. 3) y una permanente (Ec. 4). La primera tiende a cero a corto plazo, por lo que sus efectos desaparecen en un breve período desde el inicio de la aplicación de la fuerza.

Fig.4. Detalle de Solución para $\beta = 1$ y $\xi = 0.02$.

| | | |
|---|---|--|
| Solución | | |
| $x[t] = x[t]_{\text{Transitorio}} + x[t]_{\text{Permanente}}$ | | |
| $x[t]_{\text{Trans}} = e^{-t(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_1 + e^{t(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_2$ | | |
| $x[t]_{\text{Perman}} = A \text{Sin}[t \Omega + \delta]$ | | |
| $A = \frac{q/m}{\sqrt{4\lambda^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}} = 0.0150 \text{ m}$ | $\delta = \text{ArcTan}\left[\frac{-2\lambda \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right] = -1.57$ | |
| $\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 1.000$ | $\xi = \frac{\eta}{2m\omega} = 0.02$ | $\text{DAF} = \frac{1}{\sqrt{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}} = 25.001$ |
| $A = \frac{q}{k} \text{DAF} = 0.0150 \text{ m}$ | | $\delta = \text{ArcTan}\left[\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right] = -1.57 \text{ } \text{ } = -89.90 \text{ } ^\circ$ |

$$x[t]_{\text{Trans}} = e^{-t(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_1 + e^{t(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_2 \quad [3]$$

- c_1, c_2 : constantes de integración (condiciones iniciales).

$$x[t]_{\text{Perman}} = A \text{Sin}[t\Omega + \delta] \quad [4]$$

- A : amplitud del movimiento.
- Ω : frecuencia de la fuerza excitadora.
- δ : desfase del movimiento respecto a la fuerza excitadora.

Esta solución permanente es la que interesa desde el punto de vista del análisis dinámico de estructuras, fundamentalmente su amplitud, que nos proporciona los desplazamientos generadores de tensiones estructurales. Un factor esencial para comprender cómo varían estas amplitudes es el Factor de Amplificación Dinámica o DAF (por sus siglas en inglés). Este parámetro (Ec. 5), que depende de la relación entre frecuencias β (del sistema y de la fuerza excitadora) y del factor de amortiguamiento ξ (porcentaje de amortiguamiento real sobre el amortiguamiento crítico del sistema). En el caso que se muestra tenemos $\beta = 1$ y

$\xi = 0.02$, lo que supone un $DAF = 25$ y una amplitud de movimiento de 15 mm . Una pequeña variación en la frecuencia de la fuerza excitadora (de 110.84 Hz a 100.00 Hz , manteniendo el amortiguamiento, lleva a $\beta = 0.902$ y a una brusca disminución del factor de amplificación dinámica $DAF = 5.276$ al que corresponde una amplitud de movimiento de 3.2 mm (Fig. 5).

$$DAF = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \beta)^2 + (1 - \beta^2)^2}} \quad [5]$$

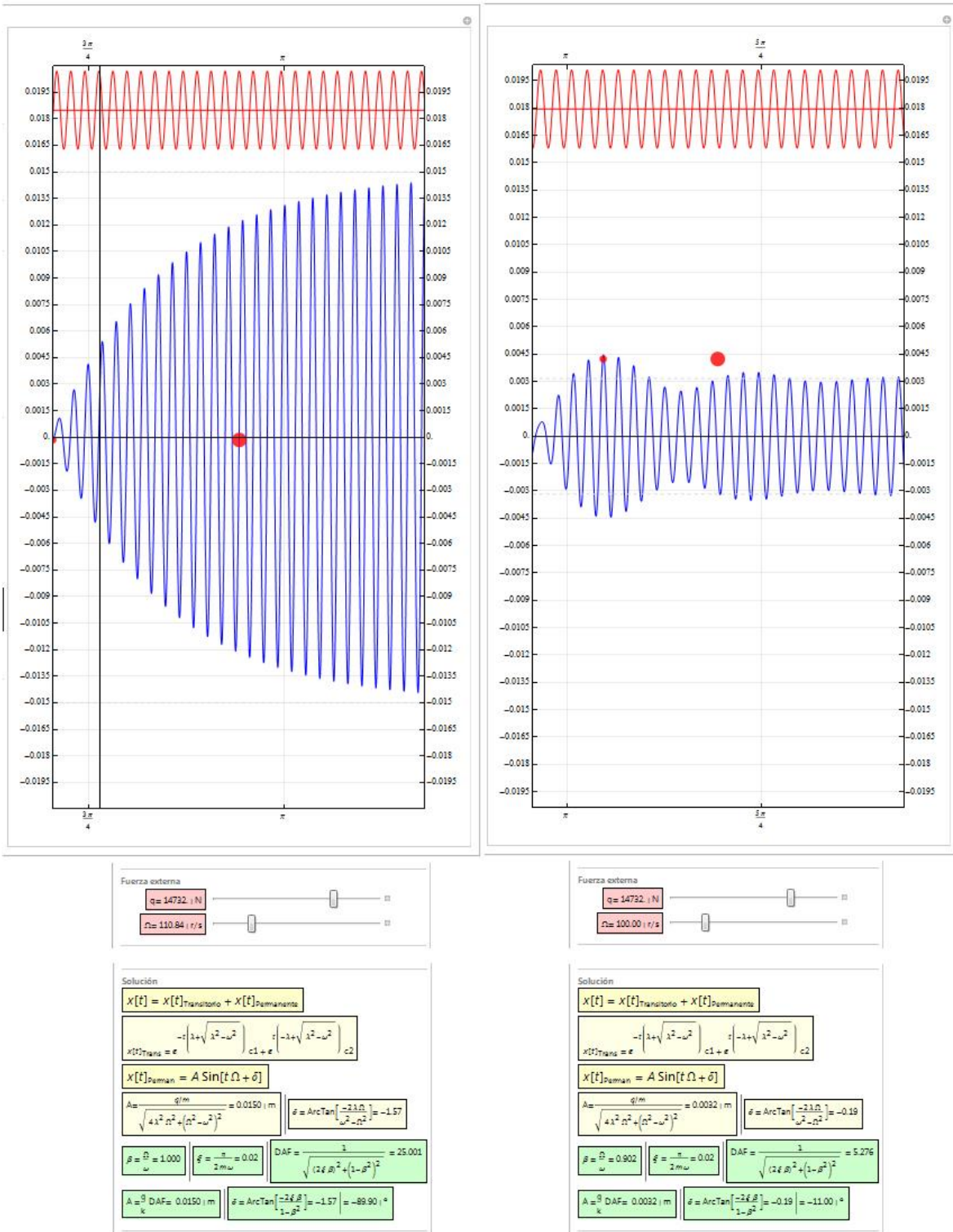
- ξ : factor de amortiguamiento.
- β : relación entre las frecuencias de la fuerza excitadora y el sistema.

Fig.5. Detalle de Solución para $\beta = 0.902$ y $\xi = 0.02$.

| | | |
|--|--|--|
| Solución | | |
| $x[t] = x[t]_{\text{Transitorio}} + x[t]_{\text{Permanente}}$ | | |
| $x[t]_{\text{Trans}} = e^{-t(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_1 + e^{-t(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})} c_2$ | | |
| $x[t]_{\text{Perman}} = A \sin[t \Omega + \delta]$ | | |
| $A = \frac{q/m}{\sqrt{4\lambda^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}} = 0.0032 \text{ m}$ | $\delta = \text{ArcTan}\left[\frac{-2\lambda \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right] = -0.19$ | |
| $\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.902$ | $\xi = \frac{\eta}{2m\omega} = 0.02$ | $DAF = \frac{1}{\sqrt{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}} = 5.276$ |
| $A = \frac{q}{k} DAF = 0.0032 \text{ m}$ | $\delta = \text{ArcTan}\left[\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right] = -0.19 \text{ rad} = -11.00^\circ$ | |

En la Figura 6 se comparan las ventanas de gráficos de los dos supuestos anteriores. Puede apreciarse la diferencia de amplitudes del estado permanente correspondientes a las dos frecuencias de la excitación, por otra parte relativamente próximas entre sí, lo que pone de manifiesto la necesidad de conseguir que la frecuencia de vibración natural de una estructura quede lo más alejada posible de las previsible frecuencias de excitación que se producirán durante la puesta en servicio de la misma. Asimismo, el estado transitorio también se pone de manifiesto.

Fig.6. Comparativa de dos frecuencias de excitación próximas.



3. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una aplicación informática que modeliza el comportamiento de un oscilador de un grado de libertad excitado armónicamente. Todos los parámetros físicos del oscilador y la fuerza excitadora pueden variarse, y observar los resultados en tiempo real, tanto numéricamente en los parámetros de salida, como gráficamente. El software necesario para usar esta aplicación es gratuito, en realidad es suficiente la instalación de un *plug-in* para que funcione en cualquier navegador de los más utilizados (*Firefox*, *IE Explorer*, *Safari*), o sistema operativo (*Windows*, *iOS*, *Android*). Se puede alojar en un servidor para operar desde una página web, o bien trabajar localmente sin conexión a internet.

La capacidad de visualización del comportamiento del sistema oscilador, en conexión con las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan, y en especial las implicaciones que se derivan de cara al diseño de estructuras civiles o de edificación, es fundamental y este desarrollo ayuda en esta tarea a los estudiantes de cálculo avanzado de estructuras.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Buchholdt, H. (1997). *Structural dynamics for engineers*. London: Thomas Telford Publications.
- Car, E., López, F. & Oller, S. (2000). *Estructuras sometidas a acciones dinámicas*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en ingeniería.
- Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of Structures* New Jersey: Prentice Hall.
- Filiatrault, A. (2002). *Elements of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Montréal: École Polytechnique de Montréal.
- Paz, M. (1992). *Dinámica estructural: teoría y cálculo*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.